УДК 530.11

О ЛОКАЛИЗАЦИИ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

А.Т.Филиппов

Теория свободных релятивистских частиц формулируется посредством локализации линейных канонических симметрий простейшего билинейного лагранжиана. Соответствующая неабелева калибровочная группа содержит репараметризации и преобразования Вейля. Этот подход может быть применен также для построения калибровочной теории частиц со спином и теории струны.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Gauging of Canonical Transformation in the Relativistic Particle Theory

A.T.Filippov

A relativistic theory of particles is formulated by gauging the linear canonical symmetries of the simplest bilinear lagrangian. The resulting non-abelian group includes reparametrizations and Weyl transformations. The approach can be used for constructing a gauge theory of spinning particles as well as for string theories.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Разработка теории суперструн привела к необходимости пересмотра некоторых из основных понятий обычной локальной теории поля. Особое внимание привлекает проблема связи между квантовой теорией одной релятивистской частицы и соответствующей квантовой теорией поля. Дело в том, что переход от квантовой теории одной релятивистской струны ("первично" квантованная теория) к теории квантованного поля взаимодействующих струн ("вторично" квантованная теория) оказался весьма не тривиальным. Например, в работах /1-3/ этот переход основывается на новой, более приспособленной к нуждам теории струн формулировке рецепта перехода от одночастичной релятивистской теории к квантовой теории поля. Наиболее существенно в этой формулировке выявление калибровочной природы теории релятивистской частицы, предложенное в работе /4/ (см. также более четкое обсуждение калибровочной группы для частицы со спином в /5/). Калибровочный характер теории проявляется в наличии связей, которые порождают калибровочно-подобные симметрии (репараметризации). Аналогично можно сформулировать и теорию струны /8/.

Хотя калибровочная природа релятивистской теории частиц в принципе выяснена, желательно было бы представить соответствующую калибровочную группу в максимально простой и явной, стандартной форме. Кроме того, полезно попытаться найти подход к построению теории частиц и теории струны, более полно использующий калибровочный принцип. Иными словами — получить калибровочно-инвариантную теорию посредством стандартной процедуры локализации некоторой глобальной группы симметрии исходной теории. Эти задачи и решаются в предлагаемом сообщении.

Рассмотрим скалярную частицу в d-мерном пространстве с псевдоевклидовой метрикой. Простейший лагранжиан имеет вид

$$L_o = \frac{1}{2}\dot{q}^2; \quad \dot{q}^2 = \dot{q}^\mu \dot{q}_\mu = (\dot{q}^i)^2 - (\dot{q}^o)^2, \quad \mu = 0,1,\dots,d, \qquad (1)$$

где q^μ-координаты частицы, а точка обозначает дифференцирование по параметру t. Несмотря на формальную инвариантность относительно преобразований Лоренца $q^\mu \to L^\mu_\nu q^\nu$, эта теория не является правильной теорией релятивистской частицы. Хорошо известно, что для описания релятивистской частицы с массой m необходимо взять лагранжиан $L_o = m\sqrt{-\dot{q}^2}$. Соответствующее действие инвариантно относительно произвольных репараметризаций. Поэтому в работах /4,6/ было предложено положить в основу требование репараметризационной инвариантности. Тогда лагранжиан для массивной частицы можно взять в виде

$$L_o = \frac{1}{2}\dot{q}^2/e - em^2,$$

где e — новая переменная, подобная калибровочному полю.

С принципиальной точки зрения, такой подход нельзя признать удовлетворительным. Во-первых, исходная релятивистская динамика предполагается уже известной, она лишь записывается в другой форме. Во-вторых, придается слишком важное значение группе репараметризаций, представляющей сложный математический объект и не имеющей непосредственного отношения к физике. Наконец, даже если признать за полученной моделью статус калибровочной теории, ее формулировка слишком сильно отличается от стандартных, что особенно неприятно при переходе к квантовой теории с взаимодействием. В связи с этим мы предлагаем другой подход к построению теории свободных релятивистских частиц, основанный на локализации очевидных канонических симметрий лагранжиана (1).

Определим канонические импульсы $p_\mu = \partial L_o / \partial \dot{q}^\mu$ и запишем лагранжиан (1) в виде

$$L_o = p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(pq)^{\cdot}. \qquad (2)$$

С точностью до граничных условий, которые всегда легко восстановить, полную производную в правой части (2) можно отбросить. Рассмотрим преобразования, относительно которых действие инвариантно. Как известно, их можно представить в форме

$$\delta p = -\frac{\partial G}{\partial q}, \quad \delta q = \frac{\partial G}{\partial p}, \qquad G = G(p, q;\ a). \qquad (3)$$

Здесь a_i — некоторые параметры, которые сначала предполагаются не зависящими от t. Их зависимость от t приведет к нарушению инвариантности относительно (3), причем

$$\delta L_o = \frac{1}{2}\dot{a}_i(p\partial_p + q\partial_q)\frac{\partial G}{\partial a_i}. \qquad (4)$$

В частном случае однородных канонических преобразований, относительно которых инвариантна и форма $\frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q)$, размерность G равна 2, так что

$$p\partial_p G + q\partial_q G = 2G, \qquad \delta L_o = \dot{a}_i \frac{\partial G}{\partial a_i}. \qquad (5)$$

Сосредоточимся теперь на линейных преобразованиях. Они порождаются квадратичной по p и q функцией G, ее общий вид

$$G = \frac{1}{2}a_1 p^2 + a_2(pq) + \frac{1}{2}a_3 q^2. \qquad (6)$$

Соответствующее инфинитезимальное каноническое преобразование есть

$$\delta p = -a_2 p - a_3 q, \quad \delta q = a_1 p + a_2 q. \qquad (7)$$

Если положить $\Psi^T = (p, q)$, то преобразование (7) можно записать в матричном виде

$$\delta\Psi = F\Psi, \qquad F = \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь F — произвольная вещественная бесследовая матрица. Такие генераторы порождают группу $SL(2, R) \sim SU(1, 1)$. Легко видеть, что лагранжиан L_o инвариантен лишь относительно ее абелевой подгруппы, определяемой условием $\delta p = 0$, т.е.

$$\delta p = 0, \qquad \delta q = a_1 p. \tag{9}$$

Если предположить, что a_1 зависит от t, то согласно (4) получим $\delta L_o = \frac{1}{2}\dot{a}_1 p^2$. Для компенсации этой добавки введем компенсирующее калибровочное поле ℓ_1. Новый лагранжиан

$$L_1 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{1}{2}\ell_1 p^2, \tag{10}$$

инвариантен относительно преобразований с произвольной функцией $a_1(t)$, если при этом

$$\delta\ell_1 = \dot{a}_1. \tag{11}$$

Процедуре перехода от лагранжиана (1) к калибровочно-инвариантному лагранжиану (10) посредством локализации преобразования (9) можно придать совершенно стандартную форму, переписав кинетическую часть лагранжиана L_o в виде

$$L_o = \frac{1}{4}\left(\Psi^T i\sigma_2 \frac{d\Psi}{dt} - \frac{d\Psi^T}{dt} i\sigma_2 \Psi\right) + \dots, \tag{12}$$

где σ_2 — стандартная матрица Паули. Так как генератор преобразования (9) есть матрица $F_1 = a_1\sigma_-$, где $\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$, то вводя калибровочное поле $A = \ell_1\sigma_-$ и "удлиняя" производную в (12), получим калибровочно-инвариантный лагранжиан

$$L_1 = \frac{1}{4}\left\{\Psi^T i\sigma_2 \left(\frac{d}{dt} - A\right)\Psi - \left[\left(\frac{d}{dt} - A\right)\Psi\right]^T i\sigma_2 \Psi\right\}, \tag{13}$$

совпадающий с (10). Калибровочные преобразования теперь имеют также стандартный вид. Для линейных канонических преобразований $\Psi' = U\Psi$ имеем $U^T i\sigma_2 U = i\sigma_2$. Отсюда следует, что лагранжиан (13) инвариантен относительно этих преобразований, если

$$A' = UAU^{-1} + \dot{U}U^{-1}. \tag{14}$$

В нашем простом случае конечное преобразование совпадает с (9), и его матрицу $U = U_1$ легко написать:

$$U_1 = 1 + a_1\sigma_-, \quad U_1^{-1} = 1 - a_1\sigma_- .$$

Нетрудно убедиться, что лагранжиан (11) дает теорию релятивистской скалярной частицы с нулевой массой. Легко также понять, что процесс локализации глобальных симметрий в этом случае можно продолжить. Действительно, лагранжиан (10) инвариантен относительно еще одной подгруппы $SL(2,R)$, если допустить линейное преобразование калибровочного "потенциала" ℓ_1:

$$\delta p = -a_2 p, \qquad \delta q = a_2 q, \qquad \delta\ell_1 = 2a_2\ell_1 . \tag{15}$$

В этом преобразовании легко узнать растяжения, относительно которых p, q и ℓ_1 имеют соответственно размерности -1, +1, +2. Локализация этого преобразования приводит в итоге к теории с калибровочным полем

$$A = \ell_1\sigma_- - \ell_2\sigma_3 , \tag{16}$$

которое преобразуется согласно правилу (14) с матрицей

$$U = e^{-a_2\sigma_3}\,(1 + a_1 e^{-a_2}\sigma_-). \tag{17}$$

Легко найти, что лагранжиан (13) сводится к

$$L_2 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{1}{2}\ell_1 p^2 - \ell_2(pq). \tag{18}$$

Как видно из (17), эта теория — неабелева, просто преобразуется лишь калибровочный потенциал ℓ_2: $\delta\ell_2 = \dot{a}_2$.

Неабелеву калибровочную теорию (18) можно квантовать стандартными методами. Наиболее удобно воспользоваться квантованием в расширенном фазовом пространстве /7,8/. Ввиду возможности появления аномалий, такая теория заслуживает отдельного рассмотрения. Предложенный подход можно попытаться использовать для описания массивных калибровочных частиц; а также для калибровочной формулировки релятивистской задачи двух тел (например, если добавить к (2) член $\frac{1}{2}kx^2$, можно прийти к калибровочной теории релятивистского осциллятора, естественно обобщаемой на случай двух частиц). Так как наша основная цель — струна, мы оставляем эти возможности в стороне.

Сформулированный выше подход легко применить к теории частиц со спином. Простейший лагранжиан имеет вид [4,6]

$$L_0 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}p^2, \tag{19}$$

где ψ^μ — грассмановы переменные (однокомпонентные или двухкомпонентные). Группы линейных канонических преобразований в этом случае есть OSp (1,1/2)*. Локализация преобразований выполняется точно так же, как и в случае скалярной частицы. Введем $\Psi^T = (p, q, \psi)$ или $\Psi^T = (p, q, \psi_1, \psi_2)$ и заменим в (12) матрицу $i\sigma_2$ на матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i1 \end{pmatrix}.$$

Построив суперматрицу преобразований симметрии лагранжиана (19) и введя соответствующее калибровочное поле A, можно получить суперкалибровочно-инвариантный лагранжиан (13). В простейшем случае, когда ψ — однокомпонентная грассманова переменная, находим лагранжиан, постулированный в [4,6]:

$$L_1 = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} - \frac{1}{2}\ell p^2 - \frac{i}{2}\chi(p\psi), \tag{20}$$

где χ — грассманова часть калибровочного поля. Аналогично строится и более общая суперкалибровочная теория для двухкомпонентных грассмановых величин ψ^μ. Более подробное обсуж-

---

* *Алгебра этой группы играет чрезвычайно важную роль в новых конструкциях перехода от теории частиц к теории поля, развиваемых в работах [9,10]. Однако происхождение и смысл этой алгебры, по-видимому, имеют иную природу, не связанную непосредственно с каноническим преобразованием.*

дение возникающих здесь новых возможностей и формулировка квантовой теории будут опубликованы отдельно. Здесь отметим, что предложенный подход можно применить к теории бозонной и фермионной струны. В первом случае лагранжиан обычной струны Д'Аламбера после локализации линейных канонических преобразований дает стандартную калибровочную теорию релятивистской струны /6, 11/ . Вероятно, более подробный анализ позволит глубже понять происхождение вейлевой симметрии этой теории (в нашей формулировке теории релятивистской частицы вейлева симметрия (15) также была получена локализацией канонических преобразований). Наконец, явная калибровочно-инвариантная теория релятивистской частицы может оказаться полезной для обнаружения новых связей между "первично" и "вторично" квантованными теориями частицы и струны.

За полезные обсуждения и замечания автор благодарен А.П.Исаеву и П.Таунсенду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Siegel W. — Phys. Lett., 1985, 151B, p.391, 396.
2. Siegel W., Zwiebach B. — Nucl. Phys., 1986, B263, p.105.
3. Itoh K. et al. — Prog. Theor. Phys., 1986, 75, p.162.
   Hata H. et al. — Phys. Lett., 1986, 172B, p.186, 195.
4. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. — Nucl. Phys., 1977, B118, p.76.
5. Sokatchev E. Prepr. JINR E2-10645, Dubna, 1977.
6. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. — Phys. Lett., 1976, 65B, p.471;
   Deser S., Zumino B. — Phys. Lett., 1976, 65B, p.369.
7. Вилковыский Г.А., Фрадкин Е.С. В сб.: Нелинейные, нелокальные и неперенормируемые теории поля. ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
8. Monaghan S. — Phys. Lett., 1986, 178B, p.231.
9. Siegel W., Zwiebach B. — Nucl. Phys., 1987, B282, p.125;
   Siegel W. Prepr. UMDEPP 87-60, College Park, 1987.
10. Neveu A., West P. Prepr. CERN-TH 4547/86, 4564/86, Geneva,1986.
11. Polyakov A.M. — Phys. Lett., 1981, 103B, p.207.

Рукопись поступила 9 марта 1987 года.